Тематический план учебной дисциплины

№ урока	Наименование разделов и тем	Кол-во часов
	Раздел 1. События и вероятность. (18ч)	
1	Классификация событий. Классическое определение вероятности.	
2	Комбинаторика и вероятность.	
3	Частота события. Статистическое определение вероятности.	
4	Геометрические вероятности.	
5	Действия над событиями.	
6	Аксиоматическое определение вероятности	
7	Сложение и умножение вероятностей.	
8	Формула полной вероятности.	
9	Формула Байеса.	
	Раздел 2. Случайные величины, их распределения и числовые характеристики. (16ч)	
10	Дискретные и непрерывные случайные величины.	
11	Функция распределения.	
12	Плотность распределения	
13	Математическое ожидание.	
14	Дисперсия, среднее квадратичное отклонение.	
15	Моменты функции случайной величины.	
16	Двумерная случайная величина.	
17	Контрольная работа №1.	
	Раздел 3. Некоторые законы распределения случайных величин. (16ч)	
18	Формула Бернулли.	
19	Биномиальное распределение.	
20	Распределение Пуассона.	
21	Равномерное распределение.	
22	Нормальное распределение	
23	Некоторые другие распределения.	
24	Решение задач по теме «Распределение случайных величин».	
25	Самостоятельная работа.	
	Раздел 4. Закон больших чисел. Предельные теоремы. (6ч)	
26	Неравенство Маркова – Чебышева.	
27	Теорема Чебышева, Теорема Бернулли.	
28	Теорема Лапласа.	
	Раздел 5. Простейшие понятия математической статистики (8ч)	
29	Понятие о выборочном методе.	
30	Понятие о корреляциях и регрессиях.	
31	Понятие о проверке статистических гипотез.	
32	Итоговая контрольная работа.	

Введение

Еще первобытный человек понимал, что у десятка охотников вероятность поразить копьем зубра гораздо больше, чем у одного. Поэтому и охотились тогда коллективно.

Позднее, с опытом, человек все чаще стал взвешивать случайные события, классифицировать их исходы как невозможные, возможные и достоверные. Он заметил, что случайностями не так уж редко управляют объективные закономерности. Простейший опыт – подбрасывают монету. Выпадение орла или решки, конечно, чисто случайное событие. Но при многократном подбрасывании обычной монеты можно заметить, что появление герба происходит примерно в половине случаев. Так, например, французский естествоиспытатель Ж.Л.Л. Бюффон (1707 – 1788) в восемнадцатом столетии 4040 раз подбрасывал монету – герб выпал 2048 раз. Математик К. Пирсон в начале нынешнего столетия подбрасывал ее 24000 раз – герб выпал 12012 раз.

Наиболее интересные для начинающих задачи теории вероятностей возникли в области азартных игр. Этому, по-видимому, способствовало наличие таких «наглядных пособий», как монета или игральная кость. Формированию основ теории вероятностей способствовали также выяснение длительности жизни, подсчет населения, практика страхования.

В 1718 году в Лондоне вышла в свет книга «Учение о случаях». Ее автор – французский математик А. Муавр (1667 – 1754). Самое большое его достижение – открытие закономерности, которая очень часто наблюдается в случайных явлениях. Он впервые заметил и теоретически обосновал роль распределения, которое позднее было названо нормальным. А. Муавру также принадлежит слава введения понятия независимости событий, открытия теоремы умножения вероятностей.

Впервые основы теории вероятностей были изложены последовательно французским математиком П. Лапласом (1749 – 1827) в книге «Аналитическая теория вероятностей».

Урок 1.

Классификация событий. Классическое определение вероятности

Испытанием (опытом) называется процедура, включающая **определенные условия** и удовлетворяющая двум требованиям:

1) процедура может быть повторена достаточное большое число раз без изменения условий;
2) результаты этой процедуры при ее повторении могут меняться, и их нельзя однозначно предсказать.

Результатом (исходом) испытания (опыта) может быть результат наблюдения или измерения. Например , при подбрасывании монеты могут возникнуть два исхода – выпадет орел или решка, при продаже квартиры – продана или не продана квартира.

Теория вероятностей – это наука, которая применяется к реальным явлениям, обладающих двумя свойствами – **случайностью и массовостью.**

Случайность означает, что результаты такого явления могут быть разными и их нельзя однозначно предсказать. **Массовость** означает, что это явление не уникальное, оно может повторяться достаточно много раз без изменений условий. Прогноз, который позволяет делать теория вероятностей, выглядит так: его результат будет повторяться примерно в k% случаев.

Случайными событиями, или просто событиями, называются всевозможные результаты испытания.

Случайное событие может состоять из нескольких простых, элементарных событий.

Единичный, отдельный исход испытания называется **элементарным событием.**

Классификация событий

Достоверное событие – это событие, которое обязательно произойдет в результате испытания. Например, при подбрасывании монеты достоверным является событие, что выпадет орел (решка).

Невозможное событие – это событие, которое не может произойти в результате данного опыта. Например, извлечение черного шара из урны с белыми шарами есть событие невозможное. Невозможное событие обозначим Ø.

Совместные события. Несколько событий называются совместными, если в результате эксперимента появление одного из них не исключает появление другого. Например, при бросании трех монет выпадение цифры на одной не исключает появления цифр на других монетах.

Несовместные события. Несколько событий называются несовместными, если появление одного из них исключает появления других. Например, выигрыш, ничейный исход и проигрыш при игре в шахматы (одной партии) – три несовместных события.

Единственно возможные события. События называются единственно возможными, если в результате испытания хотя бы одно из них обязательно произойдет.

Равновозможные события. Несколько событий называются равновозможными, если в результате испытания ни одно из них не имеет объективно большую возможность появления, чем другие. При бросании игральной кости появление каждой из граней – события равновозможные.

Противоположные события. Два события называются противоположными, если появление одного из них равносильно непоявлению другого. «Герб» и «решка» при одно подбрасывании монеты являются противоположными событиями. Обозначаются такие события: А и $\overline{A}$.

Полная группа событий. Совокупность всех единственно возможных и несовместных событий называется полной группой событий.

Классическое определение вероятности

В теории вероятностей с каждым событием А связывается определенное число Р(А) – вероятность события А, отражающая степень объективной возможности этого события.

Классическое определение вероятности. Вероятностью появления события А называют отношение числа исходов, благоприятствующих наступлению этого события, к общему числу всех единственно возможных и несовместных элементарных исходов.

$$P(A)=\frac{M}{N}, \qquad (1.1)$$

где N – число всех исходов; M – число исходов, благоприятствующих наступлению события.

Свойства вероятности

1. Вероятность достоверного события равна 1.
2. Вероятность невозможного события равна 0.
3. Вероятность любого события есть число положительное, заключенне между 0 и 1.
4. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1, то есть

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Пример 1. Какова вероятность, что первый вынутый билет из урны окажется выигрышным, если в урне 50 билетов и из них 10 выигрышных?

Решение. Пусть А – событие, что первый вынутый билет оказался выигрышным.

Подсчитаем количество N всех возможных вариантов вынуть билет.

N=50

Подсчитаем количество М всех возможных вариантов вынуть выигрышный билет.

M=10

Подставляя в формулу (1.1), получим искомую вероятность:

$P(A)=\frac{M}{N}=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}$.

Упражнения.

№1. Какова вероятность того, что первый вынутый билет из урны окажется выигрышным, если в урне 110 билетов и из них 10 выигрышных?

№2. Бросается игральная кость. Какова вероятность выпадения тройки?

№3. Из колоды карт (36 карт) наудачу вынимается одна карта. Какова вероятность того, что она будет пиковой масти?

№4. В урне 10 белых и 5 черных шаров. Какова вероятность того, что наудачу вынутый шар будет желтым?

№5. Из колоды карт (54 карты) наудачу вынимается одна карта. Какова вероятность, что она будет трефовой масти?

№6. В урне 12 черных и 6 белых шаров. Какова вероятность того, что наудачу вынутый шар будет черным?

№7. Из колоды карт (36 карт) наудачу вынимается одна карта. Какова вероятность того, что она будет дамой?

Домашнее задание

В урне N билетов. Из них M выигрышных. Какова вероятность того, что первый вынутый билет окажется выигрышным?

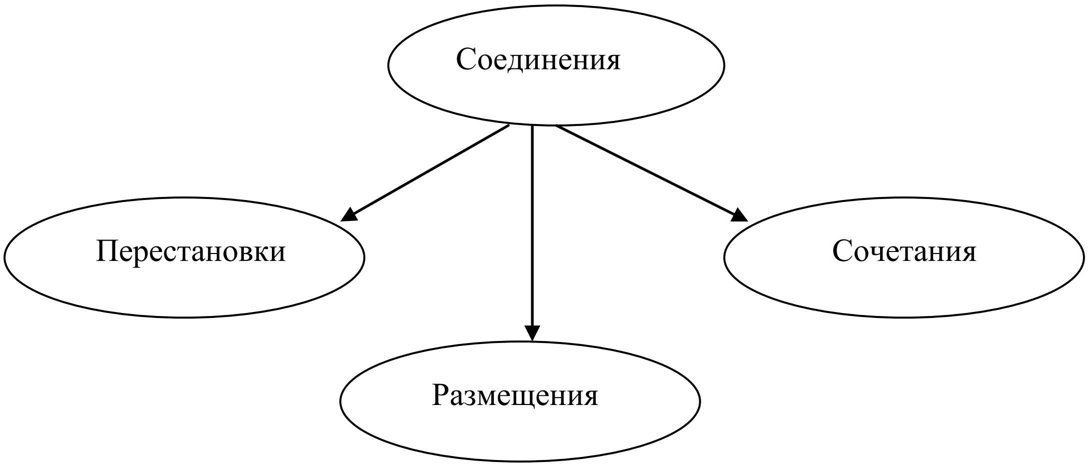
№ вари-анта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
№ вари-анта	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30										
N	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39										
M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10										

Урок 2
Комбинаторика и вероятность

Комбинаторикой называется область математики, в которой изучаются вопросы том, сколько различных соединений можно составить из элементов, принадлежащих заданному множеству.

Иногда комбинаторику рассматривают как введение в теорию вероятностей, поскольку методы комбинаторики помогают осуществить подсчет числа возможных и благоприятных исходов в разных конкретных случаях.

Виды соединения показаны на схеме.



Перестановками из n элементов называются такие соединения, из которых каждое содержит все n элементов и которые отличаются друг от друга лишь порядком расположения элементов.

Обозначение: P_n.

$$P_n = 1*2*3*...*(n-1)*n = n!$$

Пример 2.1. Садовник выделил на своем участке 7 грядок для выращивания 7 разных овощей. Сколькими способами может расположить грядки садовник?

Решение.

Здесь речь идет о порядке расположения грядок.

$N = P_7 = 7! = 1*2*3*4*5*6*7 = 5040$ (способов).

Размещениями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, из которых каждое содержит m элементов, взятых из числа данных n элементов, и которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо лишь порядом их расположения.

Обозначение: A_n^m.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!},$$

где 0≤m≤n.

Очевидно, что $A_n^1 = n \quad и \quad A_n^0 = 1.$

Размещения используют, если порядок расположения важен.

Пример 2.2. Сколько разных стартовых четверок можно выбрать из числа 10 волейболистов?

Решение.

N= $A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{1*2*3*4*5*6*7*8*9*10}{1*2*3*4*5*6} = 7*8*9*10 = 5040$ (способов).

Размещения с повторениями – размещения из n элементов по m, в которых могут оказаться одинаковые.

$$\left(A_n^m\right)_{с\ повт} = n^m.$$

Сочетаниями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, из которых каждое содержит m элементов, взятых из числа данных n элементов, и которые отличаются друг от друга по крайней мере одним элементом.

Обозначение: C_n^m.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

где 0≤m≤n.

Очевидно, что $C_n^0 = C_0^0 = 1 \quad и \quad C_n^1 = n.$

Сочетания используют, если порядок расположения элементов не важен.

Пример 2.3. Правление акционерного общества выбирает из 10 кандидатов трех человек на одинаковые должности. Сколько всевозможных групп по три человека можно составить из 10 кандидатов?

Решение. $N = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!*7!} = 120.$

Основные правила комбинаторики

Правило суммы: если объект *a* может быть выбран *m* способами, а объект *b* может быть выбран другими *n* способами, то выбор одного элемента *a* или *b* из объединенной совокупности может быть осуществлен *m+n* способами.

Пример 2.4. Имеется 20 изделий первого сорта и 30 изделий второго сорта. Необходимо выбрать два изделия одного сорта. Сколько способов выбора двух изделий возможно в данной ситуации, если учитывается порядок выбора изделий.

Решение. Пусть N – число способов выбрать два изделия первого сорта, M - число способов выбрать два изделия второго сорта.

N= $A_{20}^2 = \frac{20!}{18!} = 20*19 = 380$, $\qquad M = A_{30}^2 = \frac{30!}{28!} = 29*30 = 870,$

N + M = 380 + 870 = 1250.

Правило произведения: если объект a может быть выбран m способами и после каждого такого выбора объект b может быть выбран n способами, то выбор пары объектов a и b в указанном порядке может быть осуществлен m*n способами.

Пример 2.5. Имеется 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 7 шаров, чтобы среди них были 3 черных?

Решение. Пусть N – число способов выбрать черные шары, а M – число способов выбрать белые шары, К – искомое количество способов.

$$N = C_5^3 = \frac{5!}{3!*2!} = 10, \qquad M = C_{10}^4 = \frac{10!}{4!*6!} = 210,$$

К= N*M=10*210=2100.

Упражнения

№1. Имеется собрание сочинений из 5 томов некоего автора. Сколькими способами можно все 5 томов расставить на книжной полке?

№2. В классе 30 учеников. Необходимо избрать трех человек. Сколькими способами это можно сделать?

№3.Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5 при условии, что ни одна из цифр не повторятся?

№4. В классе 25 учащихся. Необходимо избрать четырех человек на руководящие должности. Сколькими способами можно это сделать, если одно лицо может занимать только один пост?

№5. Из 20 рабочих нужно выделить 6 рабочих для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?

№6. Собрание, на котором присутствует 20 человек, избирает двух делегатов на две конференции. Каким числом способов это можно сделать? А сколькими способами можно отобрать двух кандидатов на одну конференцию?

№7. Сколькими способами можно выбрать 13 карт из колоды в 52 карты?

№8. В взводе 3 сержанта и 30 солдат. Сколькими способами можно выделить сержанта и 3 солдат для патрулирования?

Домашнее задание

№1 Вычислить:

A_N^K, C_N^K , где N,K взяты из таблицы.

№2. Имеется N путевок в дом отдыха и K путевок в санаторий. Сколькими способами можно выдать учреждению 3 путевки в санаторий и 4 путевки в дом отдыха?

№ вари-анта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
N	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	6	7	8	9	10	11	12	13
K	3	4	5	6	7	8	9	10	3	4	5	6	7	8	9	10	3	4	5
№ вари-анта	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30								
N	14	15	16	6	7	8	9	10	11	12	13								
K	6	7	8	9	10	3	4	5	6	7	8								

Урок 3
Частота события. Статистическое определение вероятности.

Относительной частотой события называется отношение числа испытаний m, при которых событие появилось, к общему числу проведенных испытаний n.

Статистическое определение вероятности. Вероятностью события А называется то неизвестное число **p** , около которого сосредотачиваются значения статистических частот наступления события А при возрастании числа испытаний.

Пусть l – число испытаний, при проведении которых могло произойти или не произойти событие А, а k – число испытаний, при проведении которых событие А произошло. Отношение $\frac{k}{l}$ называется статистической частотой события А и обозначается

$$P_l(A)=\frac{k}{l}.$$

При достаточно большом числе испытаний l $P_l(A)\approx P(A)$.

Пример 3.1. Из 1000 произвольно выбранных деталей примерно 4 бракуются. Сколько бракованных окажется среди 2400 деталей (приближенно)?

Решение. Пусть А – событие, что выбранная деталь бракованная. Тогда Р(А)=0,004. Если среди 2400 деталей х бракованных, то $\frac{x}{2400}\approx 0{,}004,$ откуда $x\approx 10$.

Упражнения

№1. 4 зенитных пулемета ведут огонь по 3 самолетам. Каждый пулемет выбирает объект обстрела наугад. Какова вероятность того, что все 4 пулемета ведут огонь по одному и тому же самолету?

№2. В ящике 90 стандартных и 10 нестандартных изделий. Какова вероятность того, что среди 10 наугад вынутых деталей бракованных не окажется?

№3. Номер телефона состоит из 5 цифр. Какова вероятность того, что все цифры наугад выбранного номера разные?

№4. Слово «интеграл» составлено из букв разрезной азбуки. Определить вероятность получения из этих букв слова «игра»?

№5. Кулинар изготовил 15 омлетов, причем 4 пересолил. Какова вероятность, что из 3 случайно выбранных омлетов все окажутся непересолеными?

№6. Найти вероятность того, что в соединении из 5 цифр телефонного номера окажутся все цифры, кратные 3?

№7. Студент пришел на экзамен, зная 24 из 32 вопросов программы. Экзаменатор задал студенту 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент ответит на все три вопроса.

№8. Из колоды карт наудачу вынимают 4 карты. Найти вероятность того, что среди них окажется точно один туз.

№9. Группа туристов из 15 юношей и 5 девушек выбирает по жребию хозяйственную команду в составе 4-х человек. Какова вероятность того, что в числе избранных окажется двое юношей и две девушки?

№10. Из участников танцевального кружка, состоящего из 8 девушек и 4 юношей, выбираются 9 человек для определенного танца. Найти вероятность того, что среди участников окажутся все юноши.

№11. Какова вероятность того, что наудачу взятая пластинка домино содержит число очков не менее 4 и не более 6?

№12. Экзаменационные работы абитуриентов зашифрованы целыми числами от 1 до 90 включительно. Какова вероятность того, что номер наудачу выбранной работы кратен 10 или 11?

№13. Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 черных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

№14. В урне находятся 20 белых и 15 черных шаров. Наудачу вынимают один шар, который оказался белым, и откладывают его в сторону. После этого берут еще один шар. Найдите вероятность того, что этот шар тоже окажется белым.

№15. В коробке имеются 30 лотерейных билетов, из которых 26 пустых. Наугад вынимают одновременно 4 билета. Найдите вероятность того, что из 4 билетов два окажутся выигрышными.

Домашнее задание

№1. Имеется собрание сочинений из N томов. Все N томов расставляются на книжной полке случайным образом. Какова вероятность того, что тома расположатся в порядке 1,2,…,N или N,…,2,1?

№2. . Имеется собрание сочинений из N томов. На верхней полке умещаются только M томов (M<N). Эти тома берут из N томов случайным образом и расставляют на

верхней полке случайным порядком. Какова вероятность того, что тома расположатся в порядке 1,2,…,M или M,M-1,…,2,1?

№ вари-анта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
N	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	8	9	10	11	12	13	14	8	9
M	3	4	5	6	7	8	9	10	3	4	5	6	7	8	9	10	3	4	5
№ вари-анта	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30								
N	10	11	12	13	14	8	9	10	11	12	13								
M	6	7	8	9	10	3	4	5	6	7	8								

Урок №4
Геометрическая вероятность

Пусть с вероятностью 1 точка попадает в область D. Попадание в любую точку области D равновероятно. Пусть $G \subset D$. Какова вероятность того, что точка попадет в область G?

Геометрической вероятностью события A называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события, к мере всей области.

$$P(A) = \frac{S_G}{S_D},$$

где S_G - площадь области G, S_D - площадь области D.

Пример 4.1. Биатлонист стреляет в мишень. Мишень – круг радиуса R = 4 см. Биатлонист попадает в мишень с вероятностью 1. Попадание в любую точку мишени равновероятно. Необходимо попасть в круг радиуса r = 1 см.

Решение. $P(A) = \frac{S_G}{S_D} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{1}{16}$.

Упражнения

№1. В квадрате находится другой квадрат, сторона которого вдвое меньше. Найти вероятность того, что точка, брошенная в квадрат так, что ее положение в квадрате равновозможное, окажется внутри второго квадрата.

№2. Биатлонист стреляет в круг радиуса R=10 см. В этот круг биатлонист попадает с вероятностью 1. Попадание в любую точку круга равновероятно. Внутри круга радиуса R=10 находится круг радиуса R=1 см. Если он не попадет в меньший круг, он обязан бежать штрафной круг. Какова вероятность того, что биатлонист не побежит штрафной круг.

№3. Перед окопами вдоль прямой линии через каждые 10м установлены противотанковые мины. Перпендикулярно этой линии движется танк, ширина которого 3м. Какова вероятность того, что танк пересечет линию установки мин невредимым?

№4.

Домашнее задание

№1. Биатлонист стреляет в мишень. Мишень – круг радиуса R см. Биатлонист попадает в мишень с вероятностью 1. Попадание в любую точку мишени равновероятно. Необходимо попасть в круг радиуса r.

№ вари-анта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
R	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	5	6	7	8	9	10	11	12	13
R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	3	4	5	6	7	8	9	10	1
№ вари-анта	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30								
R	14	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14								
r	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2								

Урок 5
Действия над событиями

Произведением AB (или пересечением $A \cap B$) двух событий A, B называется событие, состоящее в совместном появлении и события A, и события B.

Пример 5.1. Определим событие A как множество студентов, сдавших зимнюю сессию только на отлично, а событие B – как множество студентов, сдавших летнюю сессию только на отлично. Тогда произведение AB – подмножество студентов, сдавших на отлично и зимнюю, и летнюю сессию.

Суммой A + B (или объединением $A \cup B$) двух событий A, B называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них, т.е. или A, или B, или обоих вместе.

Пример 5.2. Если события A и B имеют тот же смысл, как и в примере 5.1, то сумма событий A + B – подмножество студентов, сдавших на отлично или летнюю, или зимнюю, или обе сессии.

Упражнения

№1. Брокерская фирма имеет дело с акциями и облигациями. Для анализа деятельности фирме полезно оценить вероятность того, что лицо, интересующее фирму, является держателем акций (событие A) или облигаций (событие B). Определите AB и A + B.

№2. Среди студентов, собравшихся на лекцию по математической статистике, выбирают одного. Пусть событие A означает, что выбранный студент окажется юношей; событие B – студент не курит; событие C – студент живет в общежитии. Опишите событие $AB\overline{C}$.

№3. Среди учащихся колледжа выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, что выбранный оказался юноша; событие B – в том, что он учится на заочном факультете, и событие C – в том, что он работает на заводе.

а) Опишите событие $\overline{A}B\overline{C}$.

б) Опишите событие $AC + \overline{AC}$.

№4. Если событие A – выигрыш по билету одной лотереи, B – выигрыш по билету другой лотереи, то что означают события:

$$C = A\overline{B} + \overline{A}B, \qquad Д = A\overline{B} + \overline{A}B + AB\,?$$

№5. Пусть события A, B, C означают соответственно сдачу экзамена по теории вероятностей первым учащимся, вторым и третьим, а событие $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ означают, что соответствующие учащиеся не сдали этот экзамен. Тогда как понимать события:

$$Д = A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C \qquad и \qquad E = AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC\,?$$

№6. Три стрелка стреляют по мишени. Предполагается, что события попадания в мишень для стрелков независимы и вероятности попадания стрелков в мишень равны p_1=0,9; p_2=0,8; p_3=0,7. Какова вероятность того, что:

а) все три выстрела окажутся успешными?

б) хотя бы один из трех выстрелов окажется успешным?

в) один выстрел окажется успешным, два неуспешными?

№7. Брошены три игральных кости. Какова вероятность того, что на всех трех костях выпадут шестерки?

№8. Три студента сдают экзамен. Предполагается, что события успешной сдачи экзамена студентами независимы и вероятности успешной сдачи равны p_1=0,9; p_2=0,8; p_3=0,7. Какова вероятность того, что хотя бы один студент экзамен не сдаст?

№9. Три стрелка стреляют по мишени. Предполагается, что события попадания в мишень для стрелков независимы и вероятности попадания стрелков в мишень равны p_1=0,8; p_2=0,7; p_3=0,6. Какова вероятность того, что:

а) все три выстрела окажутся успешными?

б) хотя бы один из трех выстрелов окажется успешным?

в) один выстрел окажется успешным, два неуспешными?

№10. Два шахматиста играют матч из восьми партий. Вероятность выигрыша первым шахматистом равна 0,8; ничьи 0,1; проигрыша 0,1. Какова вероятность выигрыша всех восьми партий первым шахматистом?

Самостоятельная работа

Три студента сдают экзамен. Предполагается, что события успешной сдачи экзамена студентами независимы и вероятности успешной сдачи равны p_1, p_2, p_3. Какова вероятность того, что:

а) хотя бы один студент экзамен не сдаст?

б) все три студента сдадут экзамен?

в) один студент сдаст экзамен, два не сдадут ?

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
P_1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,9
P_2	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,9	0,8
P_3	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,9	0,8	0,7
№ варианта	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30								
P_1	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,9	0,8	0,7								
P_2	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,9	0,8	0,7	0,6								
P_3	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5								

Домашнее задание

Три стрелка стреляют по мишени. Предполагается, что вероятности попадания в мишень для стрелков независимы и вероятности попадания стрелков в мишень равны p_1, p_2, p_3. Какова вероятность того, что:

а) все три выстрела окажутся успешными;

б) хотя бы один из трех выстрелов окажется успешным;

в) точно один выстрел окажется успешным, два неуспешными?

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
P_1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,9
P_2	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,9	0,8
P_3	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,9	0,8	0,7

№ вари-анта	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30								
P_1	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,9	0,8	0,7								
P_2	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,9	0,8	0,7	0,6								
P_3	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5								

Урок 6

Аксиоматическое определение вероятности.

Теорема сложения вероятностей 1. Вероятность суммы попарно несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Теорема сложения вероятностей 2. Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления, т.е.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) – P(AB),$$

$$P(A+B+C)= P(A) + P(B) + P(C) – P(AB) – P(AC) – P(BC) – P(ABC).$$

Пример 6.1. На военных учениях летчик получил задание «уничтожить» 3 рядом расположенных склада боеприпасов противника. На борту самолета одна бомба. Вероятность попадания в первый склад примерно равна 0,01, во второй – 0,008, в третий – 0,025. Любое попадание в результате детонации вызывает взрыв и остальных складов. Какова вероятность того, что склады противника будут уничтожены?

Решение. Обозначим события. Пусть A – событие, что склады уничтожены, A_1 – событие, что летчик попал в первый склад, A_2 – событие, что летчик попал во второй склад, A_3 – событие, что летчик попал во второй склад.

$P(A)= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0,01 + 0,008 + 0,025 = 0,043.$

Упражнения

№1 Пусть вероятность получить выпускнику одну работу = 0,4, вероятность получить другую работу = 0,5, вероятность получить предложения на оба места работы = 0,3. Определить вероятность получения для него по крайней мере одного из мест работы.

№2. В колоде 52 карты. Определить вероятность извлечения либо карты масти треф, либо карты масти бубна.

№3 Опыт состоит в случайном извлечении карты из колоды в 52 карты. Определить вероятность извлечения из колоды либо туза, либо трефы.

№4. Из трех маршрутов трамваев №8, 10, 15 для человека является нужным №8 и №10. Вычислите вероятность того, что к остановке подойдет трамвай попутного для него номера, если по линии курсируют соответственно 7,9 и 12 вагонов.

№5. 14% населения используют сорт А зубной пасты, а 9% - сорт В. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный человек будет использовать одну из 2 паст?

№6. Экзаменационные работы абитуриентов зашифрованы целыми числами от 1 до 90 включительно. Какова вероятность того, что номер наудачу взятой работы кратен 10 или 11?

№7. 25% населения смотрит только телевизор, 34% - слушают только радио. 10% слушает и радио, и телевизор. Найти вероятность того, что случайный человек слушает хотя бы одно из средств массовой информации.

№8. В лотерее выпущено 10000 билетов и установлено: 10 выигрышей по 200р., 100 – по 100р., 500 – по 25р. И 1000 выигрышей по 5р. Гражданин купил один билет. Какова вероятность, что он выиграет не меньше 25 р.?

№9. В каждой серии лотерейных билетов имеется по 100 билетов. Крупные выигрыши по условиям лотереи падают лишь на один номер облигации выигравшей серии. Найти вероятность того, что первый крупный выигрыш в лотерее выпадает на облигацию с номером, кратным 4; 5 или 9.

№10. В ящике в случайном порядке разложены 20 деталей, причем пять из них стандартные. Рабочий берет наудачу три детали. Найти вероятность того, что по крайней мере одна из взятых деталей окажется стандартной.

№11 Найти вероятность того, что взятое наудачу двузначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно.

№12 Из партии в 100 деталей, из которых 17 бракованных, выбирают 20 деталей. Какова вероятность того, что попадутся 13 бракованных и 7 исправных деталей?

№13 В урне находятся 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Найдите вероятность того, что вынутый шар окажется: 1) белым; 2) черным или красным.

Домашнее задание

№1 Найдите вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо A, либо B, либо тому и другому одновременно.

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
A	4	5	6	7	8	9	11	10	13	4	5	6	7	8	9	11	10	13	4
B	5	6	7	8	9	10	12	11	14	6	7	8	9	10	12	11	14	5	6
№ варианта	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30								
A	5	6	7	8	9	11	10	13	4	4	6								
B	7	8	9	10	12	11	14	6	7	8	9								

Урок 7
Сложение и умножение вероятностей

Теорема умножения вероятностей 1. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Пример 1. В одной урне находятся 4 белых и 8 черных шаров, в другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Решение. Пусть А – появление белого шара из первой урны, а В – появление белого шара из второй урны. События А и В независимы.

$$P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \qquad P(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

$$p(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12} = 0{,}083.$$

Теорема умножения вероятностей 2. Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность второго:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Пример 2. В ящике находится 12 деталей, из которых 8 стандартных. Рабочий берет наудачу одну за другой две детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

Решение. Пусть А – событии, что первая взятая деталь стандартная, В – вторая взятая деталь стандартная.

События А и В зависимы.

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{11} = \frac{14}{33} = 0{,}424.$$

Вероятность появления хотя бы одного события. Вероятность появления хотя бы одного события из n независимых в совокупности событий равна разности между 1 и произведением вероятностей событий, противоположных данным, т.е.

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_n}).$$

Пример 3. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определенного продукта по телевидению равна 0,04. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу того же продукта на рекламном стенде, равна 0,06. Предполагается, что оба события независимы. Определить вероятность того, что потребитель увидит хотя бы одну рекламу.

Решение. Пусть событие С – «потребитель увидит хотя бы одну рекламу». Это значит, что потребитель увидит рекламу по телевидению или на стенде, или по телевидению и на стенде. По правилу определения вероятности суммы двух событий находим:

$$P(C) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B}) = 1 - 0{,}96 \cdot 0{,}94 = 0{,}0976.$$

Упражнения

№1 Рабочий обслуживает два автомата, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течении часа первый автомат не потребует внимания рабочего, равно 0,8, а для второго автомата эта вероятность равна 0,7. Найдите вероятность того, что в течение часа ни один из автоматов не потребует внимания рабочего.

№2 В урне находятся 6 шаров, из которых 3 белых. Наудачу вынуты один за другим два шара. Вычислите вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

№3 В урне находятся 10 белых и 6 черных шаров. Найдите вероятность того, что три наудачу вынутых один за другим шара окажутся черными.

№4 В ящике 10 белых и 6 черных шаров. Наугад вынули один шар, он белый. Чему равна вероятность того, что и второй вынутый шар окажется белым?

№5 Студент пришел на экзамен, изучив только 20 из 25 вопросов программы. Экзаменатор задал студенту три вопроса. Вычислить вероятность того, что студент ответит на все три вопроса.

№6 Из колоды в 36 карт наугад одна за другой извлекаются две карты. Найти вероятность того, что ими оказались:

а) два короля;

б) две карты пиковой масти;

в) король и дама.

№7 Фирма получила приглашение от двух компаний для выполнения 2 работ. Руководство фирмы оценило вероятность получения заказа от фирмы А (соб. А) – в 0,45. А в случае, если фирма заключит договор с компанией А, то с вероятностью в 0,9 компания В даст фирме работу. С какой вероятностью компания получит оба заказа?

№8 Вероятность того, что выпускник политехнического факультета защитит диплом на 5, равна 0,6. Вероятность того, что он защитит диплом на отлично и получит приглашение на работу, равна 0,4. Предположим, что студент защитил диплом. Чему равна вероятность того, что он получит приглашение на работу?

№9 Вероятность того, что судоходная компания получит разрешение для завоза в определенный порт назначения, зависит от того, будет принят или нет необходимый для этого закон. Компания оценивает вероятность того, что произойдут оба события (принят закон и получено разрешение на посещение порта), в 0,5, а вероятность того, что необходимый закон будет принят, в 0,75. Предположим, что компания получила сведения, что закон принят. Чему равна вероятность того, что разрешение на заход в порт назначения будет получено?

№10 В данной местности среднее число дождливых дней в августе равно 10. Найти вероятность того, что первые два дня августа не будет дождя.

№11 Вероятность того, что завтра цены на потребительские товары вырастут равна 0,3; вероятность того, что завтра поднимется цена на серебро, равна 0,2, а вероятность одновременного роста цен на потребительские товары и серебро составляет 0,06. Являются ли цены на потребительские товары и серебро независимыми друг от друга? Поясните ответ.

№12 В урне содержится 10 шаров, из которых 4 – белых, 6 – черных. Наудачу извлечены 4 шара. Найти вероятность того, что хотя бы один из шаров – белый?

№13 Игральная кость бросается дважды. Определить вероятность того, что по крайней мере один раз появится 6 очков?

№14 Из группы студентов, в которой 18 юношей и 12 девушек, в совет факультета избираются 2 человека. Какова вероятность того, что среди избранных окажется хотя бы один юноша?

№15 В автопробеге участвуют 3 автомобиля. Первый может сойти маршрута с вероятностью 0,15; второй с вероятностью 0,05, а третий - с вероятностью 0,01. Определите вероятность того, что к финишу придут:

а) только один автомобиль;

б) два автомобиля;

в) по крайней мере два автомобиля.

Домашнее задание

№1 О двух акциях А и В известно, что они выпущены и той же отраслью. Вероятность того, что акция А поднимется в цене завтра, равна 0,2, вероятность того, что обе акции А и В поднимутся завтра в цене равна 0,12. Предположим, что вы знаете, что А поднимется завтра в цене, чему равна вероятность того, что и В поднимется в цене?

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P_1	О,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	О,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
P_2	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,12	0,13	0,14
№ варианта	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30		
P_1	О,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	О,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7		
P_2	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,12	0,13	0,14	0,15		

Урок 8
Формула полной вероятности

Пусть событие А может наступить с одним и только с одним из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу (такие события называются **гипотезами**). Тогда вероятность события А вычисляется по формуле

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n)P_{H_n}(A),$$

которая носит название **формулы полной вероятности.**

Вероятности гипотез $P(H_i)$ в этой формуле предполагаются известными до опыта.

Пример 1. Издательство разослало рекламные материалы на новый учебник по теории вероятностей, которые получили 80% профессоров, читающих этот курс в различных учебных заведениях. Отобрали эту книгу и приняли ее для преподавания 30% профессоров, получивших рекламные материалы и 10% не получивших их. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный профессор вуза принял этот учебник для преподавания?

Решение. Пусть А – событие, что учебник одобрен и принят к преподаванию. Гипотеза H_1 – профессор получил рекламные материалы, гипотеза H_2 – профессор не получил рекламные материалы.

$P(H_1)=0,8$, $P_{H1}(A)=0,3$

$P(H_2)=0,2$, $P_{H2}(A)=0,1$.

$P(A) = 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}24 + 0{,}02 = 0{,}26.$

Упражнения

№1 Для участия в студенческих отборочных соревнованиях из первой группы выделено четыре студента, из второй – шесть, из третьей – пять студентов. Вероятности попадания для студента каждой группы в сборную колледжа соответственно равны 0,5; 0,4; 0,3. Какова вероятность того, что наудачу выбранный участник соревнований попал в сборную?

№2 Имеется три урны. В первой урне два белых шара и один черный. Во второй урне три белых и один черный. В третьей урне четыре белых шара и один черный. Наудачу выбирается урна и из нее наудачу вынимается шар. Какова вероятность, что вынутый шар белый?

№3 Теннисист идет на игру. Если ему дорогу перебежит черная кошка, то вероятность победы – 0,2; если не перебежит, то – 0,7. Вероятность, что кошка перебежит дорогу – 0,1, что не перебежит – 0,9. Какова вероятность победы?

№4 Имеется две урны. В первой урне 5 белых и 5 черных. Во второй урне три белых шара и два черных. Наудачу выбирается урна и из нее наудачу вынимается шар. Какова вероятность того, что вынутый шар белый?

№5 Имеются три завода по производству телевизоров. Первый завод выпускает 70% продукции, второй завод – 20% продукции, третий завод – 10% продукции. У первого завода 10% брака, у второго – 5% брака, у третьего – 3% брака. Какова вероятность того, что купленный в магазине телевизор будет бракованным.

№6 На склад поступили детали с трех станков. На первом станке изготовлено 40% деталей от их общего количества, на втором – 35% и на третьем 25%, причем на первом станке было изготовлено 90% деталей первого сорта, на втором – 80% и на третьем – 70%. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь окажется первого сорта?

№7 В ящике сложены детали: 16 деталей с первого участка, 24 – со второго и 20 – с третьего. Вероятность того, что деталь, изготовленная на втором участке, отличного качества, равна 0,6, а для деталей, изготовленных на первом и третьем участках, вероятности равны 0,8. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченная деталь окажется отличного качества.

№8 Вероятность того, что клиент банка не вернет заем в период экономического роста, равна 0,04 и 0,13 – в период экономического кризиса. Предположим, что вероятность того, что начнется период экономического роста, равна 0,65. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный клиент банка не вернет полученный кредит?

№9 При слиянии акционерного капитала двух фирм аналитики фирмы получающей контрольный пакет акций, полагают, что сделка принесет успех с вероятностью, равной 0,65, если председатель совета директоров поглощаемой фирмы выйдет в отставку; если он откажется, то вероятность успеха равна 0,3. Предполагается, что вероятность ухода в отставку председателя составляет 0,7. Чему равна вероятность успеха сделки?

№10 Фирма собирается заключить контракт на поставку сельскохозяйственного оборудования в одну из развивающихся стран. Если основной конкурент фирмы не станет одновременно претендовать на заключение контракта, то вероятность получения контракта оценивается в 0,45; в противном случае – в 0,25. По оценкам экспертов компании вероятность того, что конкурент выдвинет свои предложения по заключению контракта, равна 0,4. Чему равна вероятность заключения контракта?

№11 Турист, заблудившийся в лесу, вышел на полянку, от которой в разные стороны ведут пять дорог. Если турист пойдет по первой дороге, то вероятность выхода туриста из леса в течении часа составляет около 0,6; если по второй – 0,3; если по третьей – 0,2; если по четвертой – 0,1, если по пятой – 0,1. Какова вероятность туристу выйти из леса в течение часа?

Самостоятельная работа

№1 В ящике сложены детали: N деталей с первого участка, M– со второго и P – с третьего. Вероятность того, что деталь, изготовленная на втором участке, отличного качества, равна 0,6, а для деталей, изготовленных на первом и третьем участках, вероятности равны 0,8. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченная деталь окажется отличного качества.

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
N	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	10	11	12	13	14	15	16	17
M	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	15	16	17	18	19	20
P	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	15	16	17	18	19	20	21	22
№ варианта	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30								
N	18	19	20	10	11	12	13	14	15	16	17								
M	21	22	23	24	25	26	27	15	16	17	18								
P	23	24	25	26	27	15	16	17	18	19	20								

Домашняя работа

Идет охота на волка. В охоте участвуют 4 охотника. Вероятности выхода волка на первого охотника – p_1, на второго – p_2, на третьего – p_3, на четвертого – p_4. Вероятность убийства волка первым охотником, если волк вышел на него, - p_{y1}. Вероятность убийства волка вторым охотником, если волк вышел на него, - p_{y2}. Вероятность убийства волка третьим охотником, если волк вышел на него, - p_{y3}. Вероятность убийства волка четвертым охотником, если волк вышел на него, - p_{y4}. Какова вероятность убийства волка?

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P_1	0,4	0,3	0,2	0,1	0,4	0,3	0,2	0,1	0,4	0,3	0,2	0,1	0,4	0,3	0,2	0,1
P_2	0,3	0,2	0,1	0,4	0,3	0,2	0,1	0,4	0,3	0,2	0,1	0,4	0,3	0,2	0,1	0,4
P_3	0,2	0,1	0,4	0,3	0,2	0,1	0,4	0,3	0,2	0,1	0,4	0,3	0,2	0,1	0,4	0,3
P_4	0,1	0,4	0,3	0,2	0,1	0,4	0,3	0,2	0,1	0,4	0,3	0,2	0,1	0,4	0,3	0,2
P_{y1}	0,9	0,9	0,9	0,9	0,8	0,8	0,8	0.8	0,7	0,7	0,7	0.7	0,6	0,6	0,6	0,6
P_{y2}	0,8	0,8	0,8	0.8	0,7	0,7	0,7	0.7	0,6	0,6	0,6	0,6	0,9	0,9	0,9	0,9
P_{y3}	0,7	0,7	0,7	0.7	0,6	0,6	0,6	0,6	0,9	0,9	0,9	0,9	0,8	0,8	0,8	0.8
P_{y4}	0,6	0,6	0,6	0,6	0,9	0,9	0,9	0,9	0,8	0,8	0,8	0.8	0,7	0,7	0,7	0.7
№ варианта	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30		
P_1	0,4	0,3	0,2	0,1	0,4	0,3	0,2	0,1	0,4	0,3	0,2	0,1	0,4	0,3		
P_2	0,3	0,2	0,1	0,4	0,3	0,2	0,1	0,4	0,3	0,2	0,1	0,4	0,3	0,2		
P_3	0,2	0,1	0,4	0,3	0,2	0,1	0,4	0,3	0,2	0,1	0,4	0,3	0,2	0,1		
P_4	0,1	0,4	0,3	0,2	0,1	0,4	0,3	0,2	0,1	0,4	0,3	0,2	0,1	0,4		
P_{y1}	0,9	0,9	0,9	0,9	0,8	0,8	0,8	0.8	0,7	0,7	0,7	0.7	0,6	0,6		
P_{y2}	0,8	0,8	0,8	0.8	0,7	0,7	0,7	0.7	0,6	0,6	0,6	0,6	0,9	0,9		
P_{y3}	0,7	0,7	0,7	0.7	0,6	0,6	0,6	0,6	0,9	0,9	0,9	0,9	0,8	0,8		
P_{y4}	0,6	0,6	0,6	0,6	0,9	0,9	0,9	0,9	0,8	0,8	0,8	0.8	0,7	0,7		

Урок 9
Формула Байеса

Пусть событие А может произойти лишь при условии появления одной из гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Если событие А уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формуле Байеса:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}.$$

Пример 1. Для участия в соревнованиях выделено из первой группы четыре студента, из второй – шесть, из третьей – пять студентов. Вероятности попадания для студента каждой группы в сборную колледжа соответственно равны 0,5; 0,4 и 0,3. Наудачу выбранный участник соревнований попал в сборную (событие А произошло). К какой из этих трех групп он вероятнее всего принадлежит?

Решение.

$$P(H_1) = \frac{4}{15}, \quad P_{H_1}(A) = 0{,}5,$$

$$P(H_2) = \frac{6}{15}, \quad P_{H2}(A) = 0{,}4,$$

$$P(H_3) = \frac{5}{15}, \quad P_{H3}(A) = 0{,}3,$$

$$P_A(H_1) = \frac{\frac{4}{15}0{,}5}{\frac{4}{15}0{,}5 + \frac{6}{15}0{,}4 + \frac{5}{15}0{,}3} = \frac{20}{59}, \quad P_A(H_2) = \frac{\frac{6}{15}0{,}4}{\frac{59}{150}} = \frac{24}{59}, \quad P_A(H_3) = \frac{\frac{5}{15}0{,}3}{\frac{59}{150}} = \frac{15}{59}.$$

Вероятнее всего, что попал в сборную колледжа студент из второй группы (наибольшая вероятность равна $\frac{24}{59}$).

Упражнения

№1 На первой линии производится 20% изделий от всего объема их производства, на второй – 30%, на третьей – 50%. Каждая из линий выпускает следующий процент брака: 5%, 2%, 3%. Наугад взятое изделие оказалось бракованным, требуется определить вероятность того, что оно сделано на первой линии.

№2 Из продаваемого в магазине молока 40% поставляет первый молокозавод, а второй – 60%. В среднем 9 из 1000 пакетов первого поставщика разгерметизируются, а у второго – 1 из 250. Случайно выбранный пакет оказался разгерметизированным. Найти вероятность того, что он произведен на первом заводе.

№3 На сборку поступают детали с трех предприятий, причем первое поставляет 50%, второе - 30%, третье – остальное количество. Вероятность появления брака равна соответственно 0,05; 0,1 и 0,15. Контроль обнаружил брак. Какова вероятность того, что брак произошел по вине второго предприятия?

№4 Играют в шахматы 10 перворазрядников, 15 второразрядников. Вероятность того, что в таком сеансе перворазрядник выиграет равна 0,2, для второразрядника равна 0,1. Случайно выбранный участник выиграл. Какова вероятность того, что это был второразрядник?

№5 Известно, что 5% всех мужчин и 2,5 женщин – дальтоники. Случайно выбранный страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что это мужчина?

№6 Из числа авиалиний некоторого аэропорта 60% - местные, 30% - по СНГ и 10% - в дальнее зарубежье. Среди пассажиров местных авиалиний 50% путешествуют по делам, связанным с бизнесом, на линиях СНГ таких пассажиров – 60%, на международных – 90%. Из прибывших в аэропорт пассажиров случайно выбирается один. Чему равна вероятность того, что он:

а) бизнесмен;

б) прибыл из стран СНГ по делам бизнеса;

в) прилетел местным рейсом по делам бизнеса;

г) прибывший международным рейсом бизнесмен.

№7 Вероятность того, что новый товар будет пользоваться спросом на рынке, если конкурент не выпустит в продажу аналогичный продукт, равна 0,67. Вероятность того, что товар будет пользоваться при наличии на рынке конкурирующего товара, равна 0,42. Вероятность того, что конкурирующая фирма выпустит аналогичный товар на рынок в течение интересующего нас периода, равна 0,35. Чему равна вероятность того, что товар будет иметь успех?

№8 Детали для обработки поступают из 2 заготовительных цехов: из первого цеха – 70%, из второго – 30%, причем продукция 1-го цеха имеет 10% брака, а продукция 2-цеха – 20% брака. Какова вероятность того, что случайно взятая деталь будет без дефектов?

№9 Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго автомата. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй – 84% деталей отличного качества. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена первым автоматом. Вторым автоматом.

№10 Имеются три партии деталей по 30 шт. в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 30, 25 и 20. Из произвольно выбранной партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Деталь возвращают в партию и вторично из той же партии наудачу извлекают деталь, которая также оказалась стандартной. Найдите вероятность того, что детали были извлечены из третьей партии.

№11 Имеются три урны. В первой урне два белых шара и один черный. Во второй урне три белых шара и один черный. В третьей урне четыре белых шара и один черный. Наудачу выбирается урна и из нее наудачу вынимается шар. Известно, что вынутый шар – белый. Какова вероятность того, что шар вынут из первой урны?

№12 Имеется три завода по производству телевизоров. Первый завод выпускает 70% продукции, второй завод – 20% продукции, третий завод – 10% продукции. У первого завода 10% брака, у второго – 5% брака, у третьего – 3% брака. Купленный в магазине телевизор оказался бракованным. Какова вероятность того, что бракованный телевизор произведен первым заводом?

№13 Теннисист идет на игру. Если ему дорогу перебежит черная кошка, то вероятность победы – 0,2; если не перебежит, то – 0,7. Вероятность, что кошка перебежит дорогу – 0,1, что не перебежит – 0,9. Теннисист проиграл. Какова вероятность того, что кошка дорогу перебежала?

№14 Имеются две урны. В первой урне 5 белых шара и 5 черных. Во второй урне три белых шара и два черных. Наудачу выбирается урна и из нее наудачу вынимается шар. Известно, что вынутый шар – белый. Какова вероятность, что шар вынут из первой урны?

Домашнее задание

№1 В зоомагазине в трех аквариумах плавает по N рыбок. При этом в первом К1 золотых рыбок, во втором – К2, в третьем – К3. Случайным образом выбирается аквариум и в нем одна рыбка.

А) Какова вероятность, что это будет золотая рыбка?

Б) Рыбка оказалась золотой. Какова вероятность, что она выбрана из второго аквариума?

№ вари-анта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
N	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	10	11	12	13	14	15	16	17
К1	2	3	4	5	6	7	8	9	2	3	4	5	6	7	8	9	2	3	4
К2	4	5	6	7	8	9	2	3	4	5	6	7	8	9	2	3	4	5	6
К3	6	7	8	9	2	3	4	5	6	7	8	9	2	3	4	5	6	7	8
№ вари-анта	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30								
N	18	19	20	10	11	12	13	14	15	16	17								
К1	5	6	7	8	9	2	3	4	5	6	7								
К2	7	8	9	2	3	4	5	6	7	8	9								
К3	9	2	3	4	5	6	7	8	9	2	3								

Урок 10

Дискретные и непрерывные случайные величины

Величина, которая в результате испытания может принять то или иное значение, заранее неизвестно, какое именно, считается **случайной.**

Случайные величины делятся на дискретные и непрерывные случайные величины.

I. Дискретной (прерывной) случайной величиной называется такая случайная величина, которая принимает конечное или бесконечное (счетное) число значений, с определенными вероятностями.

Обозначение: X, Y, Z и т.д.

Пример 1. Число машин, проезжающих за 1 ч через некоторый перекресток, под влиянием случайных обстоятельств есть дискретная случайная величина.

Пример 2. Число писем, поступающих в некоторое почтовое отделение, есть дискретная случайная величина.

Соотношение, устанавливающее связь между отдельными возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями, называется **законом распределения дискретной случайной величины.** Его можно представить в виде таблицы.

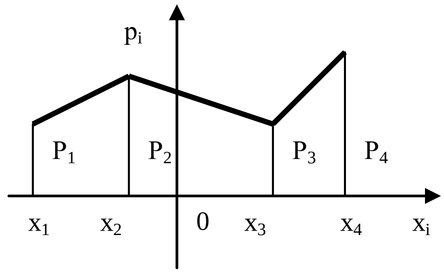
x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Для любой дискретной случайной величины

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Дискретная случайная величина может быть задана графически **многоугольником (полигоном) распределения** (рис. 1)

Рис. 1. Полигон распределения



Пример 3. Закон распределения случайной величины X представлен следующей таблицей:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,04	0,26	0,46	0,24

Вычислите следующие вероятности:

P(X>1), P(X≤2), P(1<X<3).

Решение.

P(X>1)=P(X=2)+P(X=3)=0,46+0,24=0,7,

P(X≤2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0,04+0,26+0,46=0,76,

P(1<X<3)=P(X=2)=0,46.

II. Непрерывной случайной величиной называется случайная величина, возможные значения которой непрерывно заполняют какой-то промежуток.

Пример 4. Расстояние от места разрыва снаряда до орудия при стрельбе из одного и того же орудия, при одном и том же прицеле представляет собой непрерывную случайную величину.

Пример 5. Координата точки, наудачу брошенной на числовую ось или на некоторый отрезок этой оси также есть непрерывная случайная величина.

Непрерывная случайная величина характеризуется плотностью распределения – f(x).

Плотность распределения обладает свойствами:

1) $f(x) \geq 0$,

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X попадет на участок от α до β, может быть вычислена по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

так как для непрерывной случайной величины вероятность попадания в определенную точку равна нулю, то по тем же формулам вычисляются вероятности попадания в полузакрытый и закрытый интервал.

Пример 6. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x < -1, \\ \dfrac{3}{4} \quad при \quad -1 \leq x \leq \dfrac{1}{3}, \\ 0 \quad при \quad x > \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Вычислить P(0<X<$\frac{1}{3}$).

Решение.

$$P(0<X<\frac{1}{3}) = \int\limits_{0}^{\frac{1}{3}} f(x)dx = \int\limits_{0}^{\frac{1}{3}} \frac{3}{4}dx = \frac{3}{4}x\Big|_{0}^{1/3} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\cdot 0 = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Упражнения

№1. Число телефонных звонков, поступающих в справочное бюро от абонентов между полуднем и часом дня в любой день недели, есть случайная величина X, заданная таблицей:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,3	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1

А) убедитесь, что задан ряд распределения.
Б) постройте полигон.
В) определить вероятность того, что между 12 час. 34 мин. И 12 час. 35 мин. В справочное бюро поступит больше двух звонков.

№2. Число ошибок на страницу, которые делает некоторая машинистка, есть случайная величина X, заданная следующим образом:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0,01	0,09	0,3	0,2	0,2	0,1	0,1

А) убедитесь, что задан ряд распределения.
Б) постройте полигон,
В)определить вероятность того, что машинистка сделает более двух ошибок на страницу;
Г) определить вероятность того, ею будет сделано не более 4 ошибок на страницу.

№3. В лотерее на 100 билетов разыгрываются две вещи, стоимости которых 210 и 60 условных денежных единиц. Составить закон распределения суммы выигрыша для лица, имеющего: а)один билет; б) два билета. Стоимость билета – 3 условные единицы.

№4. Процент людей, купивших новое средство от головной боли после того, как увидели его рекламу по телевидению, есть случайная величина, заданная таблицей:

x_i	0	10	20	30	40	50
p_i	0,1	0,2	0,35	0,2	0,1	0,05

А) убедитесь, что задан ряд распределения.
Б) Найти вероятность того, что более 20% людей откликнутся на рекламу.

№5. В автомагазине ведется ежедневная запись числа продаваемых машин. Эти данные использованы для составления вероятностного распределения следующих ежедневных продаж:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1

найдите вероятность того, что завтра число проданных автомобилей будет от 2 до 4 (включая 2 и 4);

№6.

функцией распределения.

Функцией распределения случайной величины X называется функция F(x), выражающая вероятность того, что X примет значение, меньшее, чем x (рис. 2).

Рис.2. Функция распределения